آموزشی

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

حسابان در Mathstudio

اشاره

درس حسابان پر از مسائلی است که جنبهٔ محاسباتی دارند و به کمک نرم‌افزار هم حل می‌شوند. نمودار و حد یک دنباله، حد، مشتق و انتگرال یک تابع این‌گونه هستند و روش حل آن‌ها در این مختصر بیان شده است.

مقدمه

در ادامهٔ مقاله‌های قبلی، بحث حسابان را در نرم‌افزار «Mathstudio» ادامه می‌دهیم. بحث حسابان به کمک این نرم‌افزار بسیار زیبا می‌شود. از طرفی نیاز به محاسبات از بین رفته است و از طرف دیگر کیفیت کار بسیار بالاست. چرا که بسیاری از مفاهیمی که قبلاً امکان دیدن نداشتند، امکان دیدن پیدا می‌کنند و شما بسیار راحت می‌توانید افکار خود را تماشا کنید.

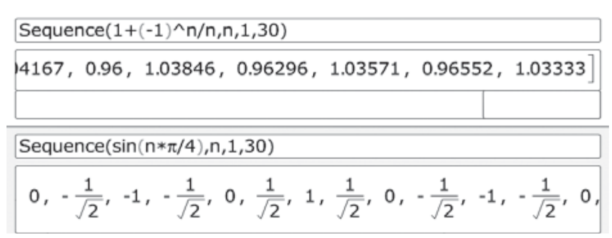
دنباله

معرفی و نوشتن جملات دنباله

اگر a_n یک دنباله باشد، برای محاسبه و نوشتن m جملهٔ اول این دنباله از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

Sequence (a_n, n, ۱, m)

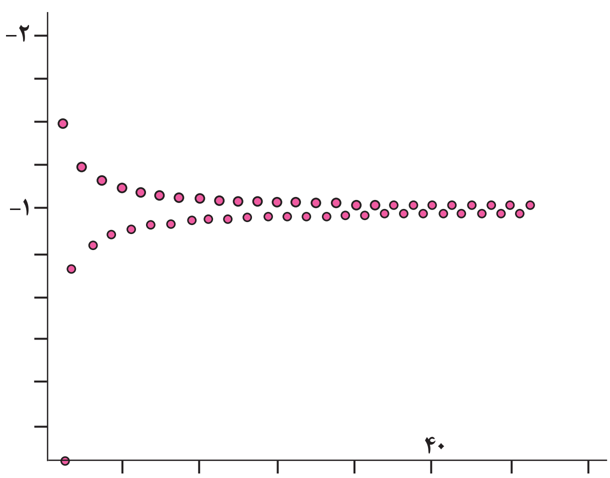
این دستور در شکل کلی به‌صورت Sequence (a_n, n, m, k, p) است که m جملهٔ شروع، k پایان و p گام حرکت به‌شمار می‌آید. برای مثال در شکل ۱، ۳۰ جملهٔ اول دنباله‌های $a_n = ۱ + \frac{(-۱)^n}{n}$ و $b_n = \sin(\frac{n\pi}{۴})$ حساب شده‌اند.



شکل ۱

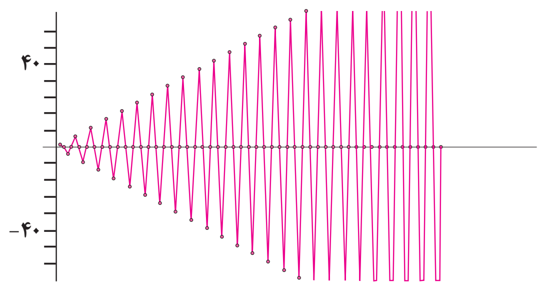
رسم نمودار یک دنباله

برای رسم نمودار یک دنباله بعد از معرفی دنباله، از کلید Plot استفاده می‌کنیم. مثلاً در شکل ۲ نمودار $a_n = ۱ + \frac{(-۱)^n}{n}$ رسم شده است.



شکل ۲

همچنین در شکل ۳ نمودار دنبالهٔ $b_n = n\sin(\frac{n\pi}{۴})$ با تغییر در نوع نمایش رسم شده است.



شکل ۳

حد دنباله

بـرای محاسبهٔ حد دنبالهٔ a_n، دستور Limit(a_n, n, ∞) را بـه‌کار می‌بریم. در شکل ۴ حد دنباله‌های $a_n = \frac{۲n+۳}{۳n-۱}$، $b_n = \sin(\frac{\pi n}{۲})$ و $c_n = \frac{\sin(n)}{n}$ محاسبه شده است که در مورد دوم حد وجود ندارد.

```
Limit((2n+3)/(3n-1),n,∞)
2/3
```

```
Limit(sin(n*π/2),n,∞)
[-1, ...., 1]
```

```
Limit(sin(n)/n,n,∞)
0
```

شکل ۴

مجموع n جملهٔ ابتدایی یک دنباله

اگـر a_n یـک دنبالـه باشـد، می‌توانیـم مجمـوع n جملـهٔ ابتدایـی آن یـا همـان S_n را بـا دسـتور Sum_Series (a_n, n, a, b, c) حساب کنیم که a، b و c به‌ترتیب شروع، پایان و گام حرکت هستند.

● **مثـال** مجموع ۱۰ جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ $a_n = (\frac{۱}{۲})^n$ و مجموع ۲۰ جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ $a_n = \frac{(-۱)^n}{n}$ را حساب کنید.

```
Sum_Series((1/2)^ n,n,1,10)
0.99902344
```

```
Sum_Series((-1)^n/n,n,1,20)
-0.6687714
```

شکل ۵

قسـمت جالب دستور Sum_Series این است که می‌توان رابطهٔ کلی این مجموع را نیز برحسـب n به‌دسـت آورد. برای مثال، حاصل ۱×۲+۲×۳+...+n×(n+۱) را برحسـب n حسـاب می‌کنیم. با توجه به اینکه a_n=n×(n+۱)، دسـتور به‌صورت Sum_Series (k*(k+1), k,۱,n) در می‌آید.

به‌همین روش حاصل عبارت $\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+...+\frac{۱}{n\times(n+۱)}$ به این صورت می‌شود: $\text{Sum\_Series}(\frac{۱}{k*(k+۱)}, k, ۱, n)$.

```
Sum_Series(k*(k+1),k,1,n)
n^3/3 + n^2 + 2n/3
```

```
Sum_Series(1/(k* k+1 ),k,1,n)
-1/(n+1) + 1
```

شکل ۶

سـؤال: آیا می‌توانید به روش اسـتقرای ریاضـی و یا روش‌های دیگر درستی این نتایج را اثبات کنید؟

بسط تیلور

بسط تیلور یک تابع، از مباحثی است که در ریاضیات دبیرستانی مطرح نمی‌شود، ولی دانستن آن همراه با نمودار خالی از فایده نیست. چرا که بسـیاری از دانش‌آموزان نکته‌سنج می‌پرسند: ماشین‌حساب یا رایانه چگونه سینوس یا کسـینوس یک زاویه را حساب می‌کنند؟ منظورشان این است که: آیا ماشین‌حساب هم از مثلث قائم‌الزاویه برای محاسبهٔ نسبت‌ها استفاده می‌کند؟ شکل ۸ می‌تواند پاسخ خوبی برای این سؤال زیبا باشد.

برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای درجهٔ n تیلور تابع y=f(x) این دستور را به‌کار می‌بریم:

Taylor (f(x),x,n)

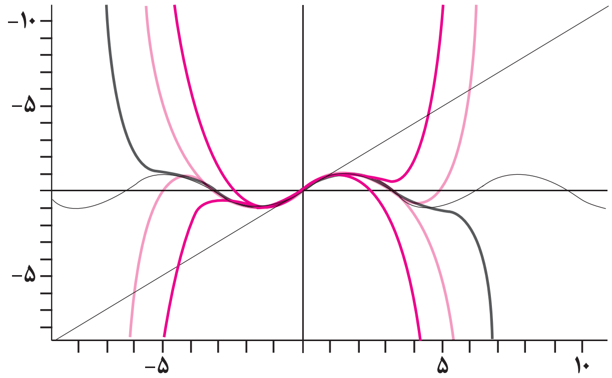
در شـکل ۷ بسـط تیلور درجـهٔ ۵ و ۶ برای تابـع y=cos(x) و y=sin(x) محاسبه شده است.

```
Taylor(sin(x),x,5)
x^5/120 - x^3/6 + x
```

```
Taylor(cos(x),x,6)
- x^6/720 + x^4/24 - x^2/2 + 1
```

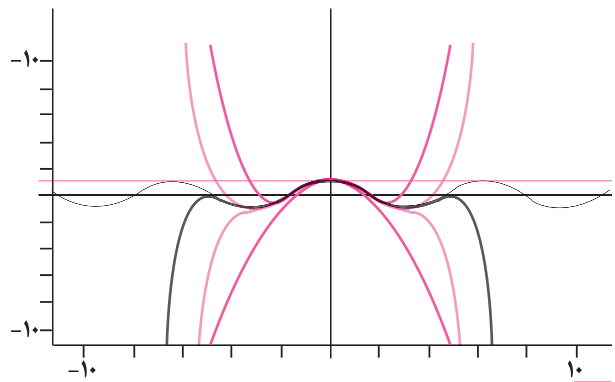
شکل ۷

در شکل ۸ تابع $y=\sin(x)$ همراه چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۱ رسم شده است.



شکل ۸

در شکل ۹ همین کار برای تابع $y=\cos(x)$ انجام شده است. زوج بودن یا همان متقارن بودن همهٔ توابعی که در این تقریب استفاده شده‌اند، باعث شده است که شکلی متقارن و زیبا به‌وجود آید.



شکل ۹

البته اگر این شکل با رنگ‌های متفاوت روی گوشی یا تبلت رسم شود، گویاتر خواهد بود.

محاسبهٔ حد

برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(x)$ از دستور «Limit (f(x), x,a)» استفاده می‌کنیم که این دستور هم در صفحهٔ سمت راست صفحه کلید و هم در قسمت «Cataloge» برنامه وجود دارد.

● **مثال:** حاصل عبارت‌های $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{4x+5}-3}$، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x}$ و $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ را حساب کنید.

```
Limit((1-cos 3x )/x^2,x,0)
9/2
Limit((√ 3x+1 -2)/(√ 4x+5 -3),x,1)
9/8
Limit(sin(1/x),x,0)
[-1, ...., 1]
```

شکل ۱۰

همان‌طور که در شکل ۱۰ مشخص شده است، $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ وجود ندارد. چرا که حاصل عددی از مجموعهٔ [۱,۱-] است.

محاسبهٔ مشتق

اگر بخواهیم از تابع $y=f(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم، از دستور «D(f(x))» استفاده می‌کنیم. در شکل ۱۱ مشتق تابع $y=\frac{\cos(x)}{e^x+x}$ و $y=x^2\sin(3x)$ حساب شده است. به این منظور صفحه کلید را یک صفحه به راست می‌بریم، حرف D را انتخاب می‌کنیم تا D( ) در صفحه ظاهر شود.

```
D(x^2sin(3x))
```
$$2x\sin(3x)+3x^2\cos(3x)$$
```
D(cos(x)/(e^x+x))
```
$$-\frac{\sin(x)}{x+e^x}-\frac{(e^x+1)\cos(x)}{(x+e^x)^2}$$

شکل ۱۱

همچنین اگر بخواهیم مشتق مرتبهٔ n تابعی را حساب کنیم، دستور مشتق به «D(f(x),x,n)» تغییر می‌کند. در شکل ۱۲ مشتق اول تا پنجم تابع $y=x^7$ حساب شده است.

```
[D(x^7,x,1),D(x^7,x,2),D(x^7,x,3),D(x^7,x,4),D(x^7,x,5)]
```
$$[7x^6,\ 42x^5,\ 210x^4,\ 840x^3,\ 2520x^2]$$

شکل ۱۲

مشتق ضمنی

اگر F یک تابع دومتغیره باشد، از دستور D به شکل «D(F,Var)» استفاده می‌کنیم که «Var» همان متغیر موردنظر است. مشتق تابع

$f(x,y)=xy^2+z^3$ نسبت به x و z در شکل ۱۳ حساب شده است.

```
D(x*y^2+z^3,x)
y²
D(x*y^2+z^3,z)
3 z²
```

شکل ۱۳

خط مماس بر منحنی

یکی از مسائلی که در بحث مشتق مطرح می‌شود، خط مماس بر منحنی اســـت. برای نوشتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع y=f(x) در نقطه‌ای به طول x=a از این دستور استفاده می‌کنیم:

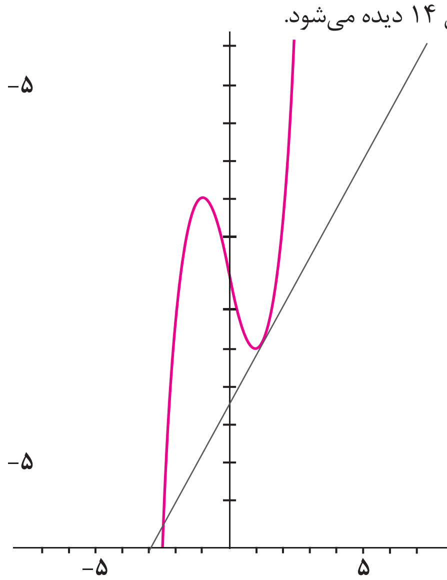
Tangentline(f(x),x,a)

که امکانات خوبی را در اختیار ما قرار می‌دهد. در شکل ۱۴ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=x^3-3x$ را در نقطه‌ای به طول x=۲ نوشته‌ایم.

```
TangentLine(x^3-3x,x,2)
9 x - 16
Plot(x^3-3x,TangentLine(x^3-3x,x,1.2))
```

شکل ۱۴

به‌عنوان یک مثال جالب، نمودار تابع $y=x^3-3x$ و خط مماس بر آن را در x=۱/۲ با هم در یک دســتگاه رسم می‌کنیم. برنامهٔ این کار در شکل ۱۴ دیده می‌شود.



شکل ۱۵

انتگرال نامعین

برای محاسبهٔ انتگرال نامعین تابع y=f(x)، یعنی $\int f(x)dx$ دو روش وجود دارد:

الــف) صفحه کلید را یک صفحه به راســت می‌بریم. علامت $\int$ را انتخاب می‌کنیم تا $\int()$ در صفحه ظاهر شـــود. در این مرحله ضابطهٔ تابع را داخل پرانتز می‌نویسیم.

● **مثــال** حاصــل $\int e^x \cos(2x)dx$ و $\int x^2 \sin(x)dx$ را حســاب کنید.

```
∫(x^2*sin(x))
- x² cos(x) + 2 x sin(x) + 2 cos(x)
∫(e^x*cos(2x))
cos(2 x) eˣ / 5 + 2 sin(2 x) eˣ / 5
```

شکل ۱۶

ب) از تابع «Integrate(f(x))» که در نوار بالای برنامه در قسمت «cataloge» وجود دارد، استفاده می‌کنیم. آشنایی با این دستور برای انتگرال معین مفید است.

● **مثال** تابع اولیهٔ توابع $g(x)=x^3\ln(x)$ و $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ را حساب کنید.

```
Integrate(x^3*ln(x))
- x⁴/16 + x⁴ ln(x)/4
Integrate(1/(x^2-4))
1/4 ln((x - 2)/(x + 2))
```

شکل ۱۷

انتگرال معین

بــرای محاســبهٔ $\int_a^b f(x)dx$ دســتور کلــی بــه صــورت «NIntegrate(f(x),x,a,b)» است که ابتدا دستور «NIntegrate()» را از بخش «cataloge» فرامی‌خوانیم. ســپس موارد لازم برای هر مثال را در آن می‌نویسیم.

مثال: حاصل $\int_{0}^{4} (x^{3} - 4x)dx$ و $\int_{0}^{2} (x^{2} - 4x)dx$ را حساب کنید.

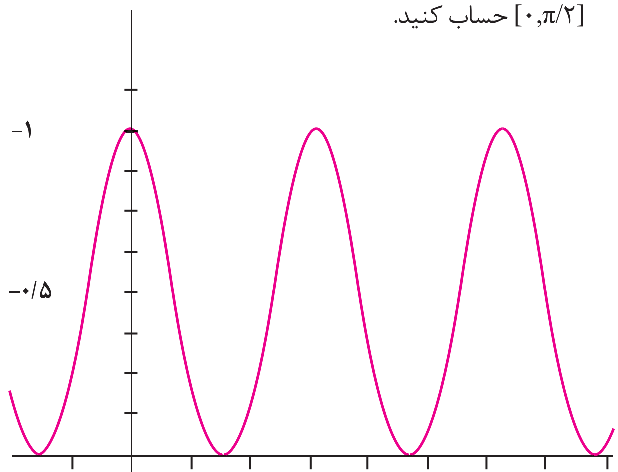
```
NIntegrate(x^2-4x,x,0,4)
- 32/3
```

```
NIntegrate(x^3-4x,x,0,2)
-4
```

شکل ۱۸

تذکر: برای محاسبهٔ انتگرال معین توابع مثلثاتی، برنامه باید برحسب رادیان تنظیم شود. به این منظور از منوی بالای برنامه، «Option» را انتخاب و سپس در قسمت «Angle mode» عبارت «Radian» را انتخاب می‌کنیم.

● **مثال** مساحت بین منحنی $f(x)=\cos^{2}(x)$ و محور xها را در فاصلهٔ $[0,\pi/2]$ حساب کنید.



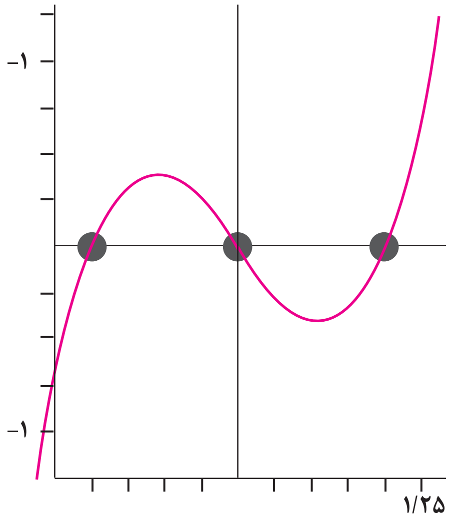
شکل ۱۹

چون این تابع مثبت است، نمودار آن بالای محور xهاست. پس مساحت همان حاصل انتگرال است که آن را حساب می‌کنیم.

```
NIntegrate((cos x )^2,x,0,π/2)
1.57040284
```

شکل ۲۰

وقتی از نرم‌افزاری در ریاضی برای حل یک مسئله استفاده می‌کنیم، امکاناتی را در اختیار ما قرار می‌دهد که روش‌های قبلی را با سرعت بالاتری طی می‌کنیم. مثلاً می‌خواهیم مساحت ناحیهٔ محصور بین محور طول‌ها و منحنی $f(x)=x^{3}-x$ را حساب کنیم. بنابراین ابتدا نمودار را رسم می‌کنیم و محل برخورد منحنی و محور xها را می‌یابیم (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

با توجه به شکل، منحنی محور xها را در نقاط ۱،۰،۱- قطع می‌کند. لذا در فاصله‌های $[-1,0],[0,1]$ انتگرال می‌گیریم و قدرمطلق آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

```
1 a=NIntegrate(x^3-x,x,0,1)
2 b=NIntegrate(x^3-x,x,-1,0)
3 s=abs(a)+b
1/2
```

شکل ۲۲

نکتهٔ پایانی

آنچه در این مقاله بیان شد فقط قسمت کوچکی از توانایی‌ها و قابلیت‌های این نرم‌افزار است. بدیهی است که معلمان و دانش‌آموزان هرقدر با نرم‌افزار بیشتر کار کنند و در آن به مهارت بیشتری برسند، از آن بهرهٔ بیشتری خواهند برد.

از طرف دیگر این را هم باید به‌خاطر سپرد که هر رایانه‌ای حتماً خطاهایی خواهد داشت و هیچ‌گاه جای فکر انسان را نخواهد گرفت و قادر به فکر کردن نیست. به این معنی که بعد از حل یک مسئله توسط رایانه، جواب‌ها توسط انسان باید تفسیر و تحلیل شود. اما نرم‌افزارها روزبه‌روز پیشرفت می‌کنند و کامل می‌شوند و این جای امیدواری دارد.

*** منبع**

از آنجا که کتاب یا مقاله‌ای برای آموزش این نرم‌افزار در دسترس نبود، ما از خود نرم‌افزار به‌عنوان منبع و برای آموزش استفاده کردیم.